

Otomata Teorisi (BİL 2114)

Fırat İsmailoğlu

Hafta 4: Düzenli İfadeler (I. Bölüm)



Hafta 4

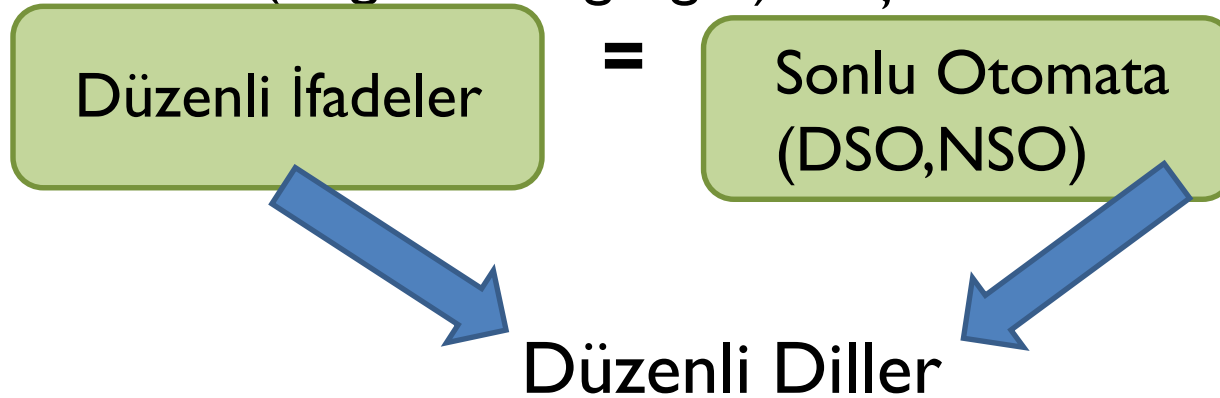
Plan

1. Düzenli Diller
2. Düzenli Operatörler
3. Düzenli İfade Örnekleri
 - i. R 'den L 'ye
 - ii. L 'den R 'ye
4. Online Düzenli İfade Programları
5. Sonlu Otomatalardan Düzenli İfadelere



Düzenli İfadeler (Regular Expressions) (Regex)

- ➔ Düzenli ifadeler otomatalar gibi dilleri ifade etmenin bir yoludur. Fakat otomatalar daha makine gibi iken, düzenli ifadeler, daha çok program sintaksı gibidir. Hatta düzenli ifadeler metin içi arama yapmak için kullanılan bir programlama dili olarak düşünülebilir.
- ➔ Düzenli ifadeler aslında sonlu otomataya denktir; sonlu otomatalarda düzenli ifadelere denktir (Kleene Teoremi)
- ➔ Düzenli ifadeler ve sonlu otomata birlikte düşünüldüğünde ‘Düzenli Diller’ (Regular Languages) oluştururlar.



Düzenli Diller (Regular Languages)

Düzenli diller, özyinelemeli (recursive) olarak tanımlanır:
 Σ , alfabesini kullanarak L düzenli dilini oluşturalım.

1. Temel: ε (boş kelime) L dilinin elemanıdır.
2. Tümevarım: her $w \in L$, her $k \in \Sigma$, için $wk \in L$ dir.

ör. $\Sigma = \{0,1\}$ olsun. Bu alfabeden üretilecek düzenli dil.

1. $L = \{\varepsilon\}$

2. $\varepsilon \in L$, için $\varepsilon 0 = 0 \in L$
 $\varepsilon 1 = 1 \in L$ } $L = \{\varepsilon, 0, 1\}$

3. $0 \in L$, için , $00 \in L$
 $01 \in L$
 $1 \in L$, için , $10 \in L$
 $11 \in L$ } $L = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11\}$

4.



Düzenli Operatörler (Regular Operations)

Düzenli ifadeler, düzenli operasyonlar kullanılarak inşa edilirler. Bu operasyonlar 3 tanedir.

L ve M iki dil olsun.

1. Birleşim (Union): $L \cup M = \{x \mid x \in L \vee x \in M\}$ (Birleşimin, elemanları ya L 'nin, ya M 'nin, yada her ikisinin birden elemanıdır).

Not bazı kaynaklarda birleşim işareti olarak '+' kullanılıyor.

2. Bitiştirme (Concatenation): $LM = L \circ M = \{xy \mid x \in L \wedge y \in M\}$

(Bitiştirmenin elemanları L 'den ve M 'den birer elemanın yanyana getirilmesiyle oluşur.)

ör. $L = \{0, 01\}, M = \{\varepsilon, b, bb\}; LM = \{0, 0b, 0bb, 01, 01b, 01bb\}$

3. Yıldız (Kleene Star): $L^* = \{x_1 x_2 \dots x_k \mid k \geq 0, \forall x_i \in L\}$.

Yani L^* 'in elemanları, L 'nin herhangi elemanlarının herhangi sayıda bitleştirilmesiyle oluşur.



Yıldız (Kleene Star)

ör. $L = \{0,1\}$ iken $L^* = \{\varepsilon, 0,1,00,11,01,10,000,111,011,101, \dots\}$.

ör. $L = \{\text{iyi, kötü}\}$

$L^* = \{\varepsilon, \text{iyi, kötü, iyiiyi, kötükötü, iyikötü, kötüiyi, iyiiyiyi, \dots}\}$

Not 1. L dili ne olursa olsun L^* her zaman boş kelime ε içerir.

Not 2. I. hafta notlarından Σ^{*} ' ı hatırlayın. Σ^* , Σ alfabesinin harfleri kullanılarak oluşturulabilecek bütün kelimelerin kümesi idi. Aynı şekilde L^* ' da, L dilinin kelimeleri kullanılarak oluşturulabilecek bütün kelimelerin kümesidir.

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \dots$$

$\{\varepsilon\}$

$\{\text{iyi, kötü}\}$

$\{\text{iyiiyi, kötükötü, iyikötü, kötüiyi}\}$

ör. $L = \{0,11\}$ iken $L^2 = \{00,1111,011,110\}$.

11 elemanı iki defa
tekrar ediyor!



ör. $A = \{0\}$ ise $A^* = \{\varepsilon, 0, 00, 000, 0000, 00000, \dots\} = 0^*$

Not. Düzenli ifadelerde daha çok tek harfli diller, örneğin $A = \{0\}$ (yada bunu direk 0 ile göstereceğiz) ve bu tek harfli dillerin yukarıda saydığımız operatörler yardımıyla oluşturdukları yeni dillerle ilgileneceğiz, örneğin, 0 ve 1 dilleriyle oluşturulmuş $0 \cup 1^*$ dili.

Düzenli Operasyonların İşlem Sırası:

1. Yıldız, 2. Bitiştirme, 3. Birleşim ($*$ > \circ > \cup)

ör. $a \cup bc^* = a \cup (b(c^*))$

$\varepsilon, c, cc, ccc, cccc \dots$ 1

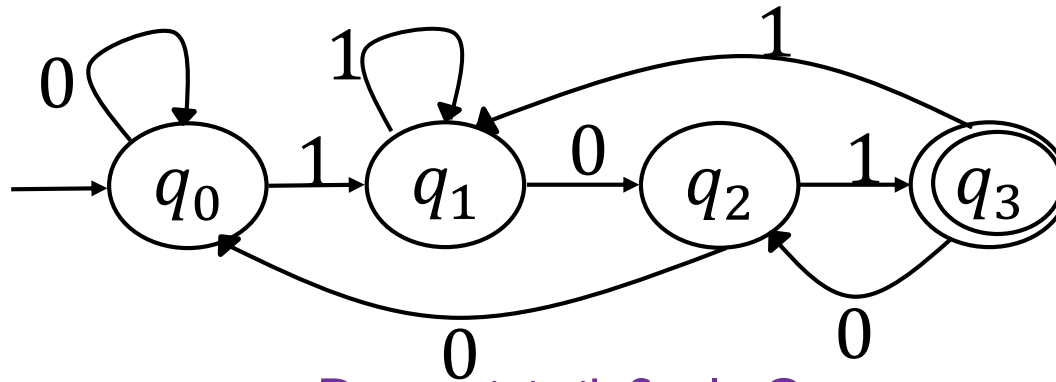
$b, bc, bcc, bccc, bcccc \dots$ 2

$\{a, b, bc, bcc, bccc, bcccc \dots\}$ 3

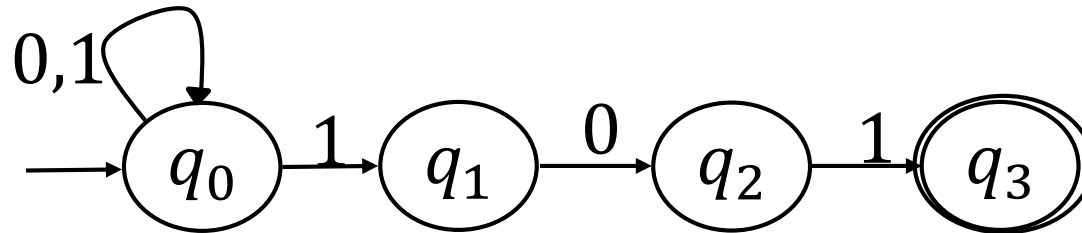
$a \cup bc^*$ dilinin kelimeleri



ör. $\Sigma = \{0,1\}$ alfabeti kullanılarak üretilen kelimelerden sonu '101' ile biten kelimeri kabul eden deterministik ve nondeterministik sonlu otomatalar ve düzenli ifade:



Deterministik Sonlu Otomata



Nondeterministik Sonlu Otomata

$$R = (0 \cup 1)^* 101$$

Düzenli İfade



Düzenli İfade Örnekleri – I (R'den L'ye):

1. $R = (0 \cup 1)01^*$: 0 yada 1 ile başlayan, ikinci harfi 0 olan, sonra (varsa) tüm harfleri 1 olan kelimelerin dilini ifade eden düzenli ifade. Bu dil şu şekilde gösterilebilir:

$$L = \{00, 10, 001, 101, 0011, 1011, 00111, 10111, \dots\}$$

2. $R = 0^*10^* = \{\varepsilon, 0, 00, 000, \dots\}\{1\}\{\varepsilon, 0, 00, 000, \dots\}$
 $= \{\varepsilon 1 \varepsilon, \varepsilon 1 0, \varepsilon 1 00, \dots, 0 1 \varepsilon, 0 1 0, 0 1 00, \dots, 00 1 \varepsilon, 00 1 0, \dots\}$
 $= \{1, 10, 100, \dots, 01, 010, 0100, \dots, 001, 0010, \dots\}$
 $= L = \{w \mid w \text{ yalnızca 1 defa 1 içerir}\}.$

3. $\Sigma = \{0, 1\}$ iken $R = \Sigma^* 1 \Sigma^* = \{0, 1\}^* 1 \{0, 1\}^*$

$$R = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 11, 01, 10, 000, \dots\} \{1\} \{\varepsilon, 0, 1, 00, 11, 01, 10, 000, \dots\}$$

$$R = \{1, 10, 11, 100, \dots, 01, 010, 0100, \dots, 11, 110, 111, 1100, \dots\}$$

$$= L = \{w \mid w \text{ en az 1 defa 1 içerir}\}.$$



Düzenli İfade Örnekleri – I (R'den L'ye):

$$\begin{aligned} 4. \quad R &= ((0 \cup 1)(0 \cup 1))^* = (\{0,1\}\{0,1\})^* = \{00,01,10,11\}^* \\ &= \{\varepsilon, 00,01,10,11,0000,0101,1010,1111,0001,\dots, 000110, \dots\} \\ &= L = \{w \mid w' \text{ nun uzunlugu çift sayidir.}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad \Sigma &= \{a, b, c, \dots, z\} \text{ olsun. Bu durumda} \\ \Sigma^* &= \{\varepsilon, a, \dots, z, aa, \dots, zz, ab, \dots, az, \dots, bct, \dots, \text{sampiyon}, \dots\} \end{aligned}$$

Σ alfabesiyle oluşturulabilecek tüm kelimelerin kümesi olur. Böylece

$$R = \Sigma^* \text{sivas} \Sigma^*$$

icinde 'sivas' altkelimesi geçen tüm kelimelerin dilini temsil eder.



Düzenli İfade Örnekleri – II (L' 'den R' 'ye):

1. $L = \{w \mid w \text{ yalnızca 2 defa 0 içerir}\}$. Bu durumda L' 'nin kelimeleri şu formda olur:

$$\begin{array}{c} \underbrace{1 \dots 1}_{1^*} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{1^*} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{1^*} \\ R = 1^* 0 1^* 0 1^* \end{array}$$

2. $L = \{w \mid w' \text{ nun ilk ve son harfi aynıdır}\}$.

Düşünmemiz gereken durumlar:

- i.* 0 ile başlayıp 0 ile biten kelimeler: $0\Sigma^*0$
- ii.* 1 ile başlayıp 1 ile biten kelimeler: $1\Sigma^*1$
- iii.* 0 kelimesi
- iv.* 1 kelimesi

Su halde cevap bu dört durumun birlesimidir:

$$R = 0\Sigma^*0 \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1$$



Düzenli İfade Örnekleri – II (L 'den R 'ye):

3. $L = \{w \mid w \text{ da yanyana 0 ve yanyana 1 olmaz}\}$. Bu durumu sağlayan dört durum vardır:

i. $01010101 \dots = (01)^*$ (0 ile başlayıp 1 ile bitenler)

ii. $010101 \dots 0 = (01)^*0$ (0 ile başlayıp 0 ile bitenler)

iii. $10101010 \dots = (10)^*$ (1 ile başlayıp 0 ile bitenler)

iv. $101010 \dots 1 = (10)^*1$ (1 ile başlayıp 1 ile bitenler)

cevap bu dört durumun birlesimidir:

$$R = (01)^* \cup (01)^*0 \cup (10)^* \cup (10)^*1$$



Online Düzenli İfade Programları

Oluşturduğumuz düzenli ifadeleri aşağıdaki online programları kullanarak test edebiliriz

- <http://regex101.com>
- <http://rubular.com>

Not. Bu programlarda { } için []; birleşim U için | kullanın.

Düzenli İfadelerin Gerçek Hayattaki Kullanımları

- Düzenli İfadeler, Linux, Perl, Python gibi dillerde kaynak kodun program sintaksına uygunluğu kontrol edilirken derleyici (compiler) tarafından kullanılırlar.
- Kullanıcı tarafından girilen email adresinin istenilen formata uygunluğu test edilirken kullanılırlar. Bunun için kullanılan düz. ifade aşağı yukarı şöyle bir şeydir:

$$/^([a-z0-9_\\.-]+)@([\\da-z\\.-]+)\\.([a-z\\.]{2,6})$/$$


Sonlu Otomatalardan Duzenli Ifadelere

Daha once gordugumuz sonlu otomatalari (DSO,NSO) duzenli ifadelerle gosterebiliriz.

